

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ГАЛИЛЕЕВЫХ МЕТОДОВ

Аннотация. Методами галилеевой геометрии решены некоторые системы второго порядка обыкновенных дифференциальных уравнений. Определены галилеевы кривизны евклидовых кривых и галилеевы квадратичные формы евклидовых поверхностей. Приведены примеры отыскания кривых и поверхностей по галилеевым кривизнам и коэффициентам галилеевых квадратичных форм соответственно. Указана галилеева связность для евклидовых поверхностей, позволяющая находить галилееву метрическую функцию евклидовой поверхности. Галилеевыми методами решена задача И. Ньютона – найдены траектории движения материальной точки двух и трех степеней свободы по заданному 2-мерному полю ускорений движения.

Ключевые слова: галилеевы кривизны евклидовых кривых; галилеевы квадратичные формы евклидовой поверхности; галилеева метрическая функция евклидовой поверхности; галилеева связность; траектория точки с 2 и 3 степенями свободы.

Abstract. Methods of Galilean geometry will allow us to find solutions of some systems of differential equations. Defined Galilean curvature of Euclidean curves and Galilean quadratic forms of Euclidean surface. They just found Euclidean curves and surfaces. By connectedness found Galilean metric functions of the Euclidean and the surface. For 2-dimensional field, the accelerated motion of a trajectory of motion of point 2 and 3 degrees of freedom.

Keywords: Galilean curvature Euclidean curves; Galilean quadratic forms Euclidean surface; Galilean metric function is the Euclidean surface; Galilean connectivity; trajectory points with 2 and 3 degrees of freedom.

Галилеева дифференциальная геометрия 3-мерных пространств построена в работе [1] по аналогии и в полном соответствии с евклидовой дифференциальной геометрией. Поэтому галилеевы методы являются и евклидовыми методами, вобравшими в себя своеобразие галилеевой геометрии, основа которого – галилеево скалярное произведение векторов. Строятся евклидова и галилеева геометрии в единой схеме – схеме Г. Вейля. Рассматривается действительное аффинное пространство A^3 с действительным линейным пространством L^3 , представляющим собой арифметическое пространство R^3 без нормы векторов, т.е. без скалярного произведения векторов. Выбранная размерность 3 несущественна. В работе [1] изложена 3-мерная геометрия. Многие положения верны и для n -мерного случая. Различные скалярные произведения векторов определяют на аффинном пространстве различные пространства, в том числе евклидово и галилеево пространства. Имеется большое разнообразие галилеевых пространств, пространство Галилея выделяется из них коммутативной и линейной геометрией. Это исторически первое из изучаемых галилеевых пространств. О некоммутативных пространствах см. в [1], о нелинейных – в [2, 3]. О нелинейной геометрии аффинной плоскости написано и в [4, с. 237–261]. Еще предстоит выяснить, какое из галилеевых пространств лучше соответствует свойствам окружающего нас пространства.

Ниже приведены основные факты теории кривых и поверхностей 3-мерного пространства-времени Галилея из [1, 5]. Методы галилеевой геометрии позволили решить некоторые новые системы обыкновенных дифференциальных уравнений, новые системы дифференциальных уравнений с частными производными первого и второго порядков. Приведены схемы решения указанных систем дифференциальных уравнений и приведены системы дифференциальных уравнений, решенные в геометриях некоммутативных галилеевых пространств.

Определены галилеевы кривизны евклидовых кривых и получены новые натуральные уравнения этих кривых. Получение векторных функций, описывающих регулярные евклидовы кривые, по их галилеевым кривизнам значительно проще, чем по евклидовым кривизнам. Введены галилеевы квадратичные формы евклидовых поверхностей, по коэффициентам галилеевых квадратичных форм получены векторные функции, описывающие евклидовы регулярные поверхности. Методы решения указанной задачи значительно проще известных. Приведены примеры отыскания кривых и поверхностей по галилеевым кривизнам и коэффициентам галилеевых квадратичных форм соответственно. Указана галилеева связность для евклидовых поверхностей, позволяющая находить галилееву метрическую функцию евклидовой поверхности; приведены примеры галилеево изометричных поверхностей.

Галилеевыми методами решена задача И. Ньютона – найдены траектории движения материальной точки двух и трех степеней свободы по заданному 2-мерному полю ускорений движения, по тангенциальной и нормальной составляющим ускорения.

1 О пространстве Галилея

1.1 Галилеево скалярное произведение векторов

Рассматривается действительное линейное пространство $\mathbf{L}^3$. Евклидовым скалярным произведением векторов $\vec{r} = (x, y, z)$ и $\vec{s} = (u, v, w)$ называется число $\vec{r}\vec{s} = xu + yv + zw$. Векторы $\vec{r}, \vec{s}$ перпендикулярны в случае $\vec{r}\vec{s} = 0$. Евклидова норма вектора $\vec{r}$ равна $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $|\vec{r}| = \sqrt{\vec{r}\vec{r}}$. При этом линейное пространство $\mathbf{L}^3$ становится евклидовым векторным пространством $\mathbf{V}^3$.

Для векторов линейного пространства $\mathbf{L}^3$ определим галилеево скалярное произведение, обозначая векторы строчными греческими буквами. Галилеево скалярное произведение $\rho\sigma$ векторов $\rho = (x, y, z)$ и $\sigma = (u, v, w)$ и галилеева норма $|\rho|$ вектора ρ таковы:

$$\rho\sigma = \begin{cases} xu, & \text{если } x \neq 0 \text{ или } u \neq 0; \\ yv + zw, & \text{если } x = u = 0. \end{cases} \quad |\rho| = \begin{cases} |x|, & \text{если } x \neq 0; \\ \sqrt{y^2 + z^2}, & \text{если } x = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Как и выше: $|\rho| = \sqrt{\rho^2}$. Линейное пространство $\mathbf{L}^3$ становится галилеевым векторным пространством $\mathbf{V}_\Gamma^3$. Выделенная первая компонента векторов называется временной, т.е. смысл первой компоненты вектора

$\rho = (x, y, z)$ есть время. Оставшиеся компоненты векторов из $\mathbf{V}_\Gamma^3$ называются пространственными. Используется следующее обозначение:

$$\rho = (t, x, y).$$

Векторы $(0, x, y)$ называются евклидовыми, они составляют евклидово векторное пространство, изоморфное $\mathbf{V}^2$. Обозначим евклидовы векторы $\vec{a}, \dots, \vec{r}, \dots$. Векторы $\rho = (x, y, z)$, $t \neq 0$, называются галилеевыми. Векторы ρ , σ перпендикулярны в случае $\rho\sigma = 0$. Всякий евклидов вектор перпендикулярен всякому галилееву вектору. Имеем прямую сумму: $\mathbf{V}_\Gamma^3 = \mathbf{V}_\Gamma^1 + \mathbf{V}^2$, $\mathbf{V}_\Gamma^1$ – 1-мерное временное пространство, изоморфное $\mathbf{V}^1$.

В связи с тем, что временная составляющая $\mathbf{V}_\Gamma^1$ галилеева векторного пространства 1-мерна, в $\mathbf{V}_\Gamma^3$ имеется единственное временное направление (точнее – два взаимно обратных). Об углах между галилеевыми векторами говорить не приходится.

1.2 Дифференцирование галилеевых функций

Галилеевы векторные функции есть

$$\gamma(v) = (t(v), x(v), y(v)), \quad v \in \mathbf{I}_1 \subseteq \mathbf{R}, \quad (2)$$

$\mathbf{I}_1$ есть некоторый интервал из множества действительных чисел $\mathbf{R}$; или функции вида

$$\gamma(t, u) = (t(v, u), x(v, u), y(v, u)), \quad (v, u) \in \mathbf{D}_1 \subseteq \mathbf{R}^2, \quad (3)$$

$\mathbf{D}_1$ – некоторая область евклидовой плоскости, ее можно считать прямоугольной: $a < v < b$, $c < u < d$. Производные галилеевых векторных функций отыскиваются покомпонентно. Смешанные производные не зависят от порядка дифференцирования.

1.3 Пространство Галилея размерности 3

3-мерное аффинное пространство, в линейном пространстве которого определено галилеево скалярное произведение векторов, называется 3-мерным пространством Галилея или 3-мерным пространством-временем Галилея и обозначается Γ^3 . Пространство-время Γ^3 является прямой суммой оси времени и евклидовой плоскости

$$\Gamma^3 = T^1 + E^2,$$

где $T^1 = \mathbf{R}$ – ось времени.

Такое определение $(n+1)$ -мерного пространства Галилея приведено в работе [6, с. 11–15], мы рассматриваем случай $n = 2$ (заметим, что в [6] галилеево скалярное произведение векторов не рассматривается). Точки пространства-времени Γ^3 называются еще событиями. События $A = (t, x, y)$ и $A_1 = (t, x_1, y_1)$ называются одновременными.

Прямые и плоскости аффинного пространства являются прямыми и плоскостями пространства Галилея. Галилеевы векторы задают временное направление в Γ^3 , оно единственно. Одновременные между собою события составляют евклидову плоскость в Γ^3 . Через всякую точку пространства Γ^3 проходит единственная евклидова плоскость. Направление времени в пространстве Γ^3 есть полупространство с евклидовой границей, проходящей через данную точку. Углов между временными направлениями не существует. Евклидова плоскость не содержит галилеевых векторов. Галилеева плоскость содержит галилеевы и евклидовы векторы.

1.4 Кривые

Согласно [1, с. 54–69] регулярная кривая класса C^3 с галилеевыми касательными векторами в естественной параметризации задается галилеевой векторной функцией

$$\gamma(t) = (t, x(t), y(t)), \quad t \in I \subseteq \mathbf{R}, \quad (4)$$

естественным параметром является время.

Кривые с евклидовыми касательными векторами изучает евклидова геометрия. От функции вида (2) к функции вида (4) переходим, обращая функцию $t = t(v)$. Функция производной первого порядка есть

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}(t) = (1, \dot{x}(t), \dot{y}(t)),$$

это галилеев вектор, галилеева норма вектора производной является единичной: $|\dot{\gamma}(t)| = 1$, см. галилееву норму (1) вектора в п. 1.1; длина дуги линии (4) от точки $\gamma(t_0)$ до точки $\gamma(t_1)$ равна $|t_1 - t_0|$. Вектор производной второго порядка является евклидовым

$$\ddot{\gamma} = \ddot{\gamma}(t) = (0, \ddot{x}(t), \ddot{y}(t)).$$

Так как $\ddot{\gamma} \perp \dot{\gamma}$ (см. п. 1.1) (галилеев вектор перпендикулярен евклидову вектору), то $\ddot{\gamma}(t)$ есть вектор нормали кривой (4). Единичный вектор нормали кривой (4) равен

$$\vec{n} = \frac{1}{|\ddot{\gamma}|} (0, \ddot{x}, \ddot{y}). \quad (5)$$

Кривизна галилеевой кривой (4) вычисляется по формуле

$$k_1 = |\ddot{\gamma}(t)| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}, \quad \vec{n} = \frac{1}{k_1} (0, \ddot{x}, \ddot{y}). \quad (6)$$

Кручение галилеевой кривой (4) равно

$$k_2 = \frac{\ddot{x} \ddot{y} - \ddot{x} \ddot{y}}{k_1^2}. \quad (7)$$

Функции кривизны и кручения кривой (4) $k_1 = k_1(t) \geq 0$, $k_2 = k_2(t)$ задают натуральные уравнения галилеевой кривой (4), функции $x = x(t)$, $y = y(t)$ есть решение системы

$$\begin{cases} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = k_1^2(t), \\ \ddot{x} \ddot{y} - \ddot{x} \ddot{y} = k_1^2(t)k_2(t) \end{cases} \quad (8)$$

обыкновенных дифференциальных уравнений, полученной по формулам (6) и (7). Кривая (4) определяется с точностью до положения в пространстве [5].

Схема решения системы дифференциальных уравнений (8). По виду первого уравнения системы (8) вводим обозначения:

$$\ddot{x} = k_1(t) \cos m(t), \quad \ddot{y} = k_1(t) \sin m(t), \quad m(t) = \int k_2(t) dt. \quad (9)$$

Введенные функции удовлетворяют и второму уравнению системы (8). Интегрируя функции (9) дважды по временному параметру t , находим функции $x(t)$ и $y(t)$ и получаем кривую (4). Начальные условия

$$t = t_0, \quad \gamma(t_0) = (t_0, x(t_0), y(t_0)) = P, \quad \gamma'(t_0) = (1, x'(t_0), y'(t_0)) = (1, m, n)$$

определяют единственную кривую, проходящую через данную точку $\gamma(t_0) = P$ и имеющую данный Галилеев единичный касательный вектор $\gamma'(t_0) = (1, m, n)$.

Пример 1. Зададим кривизны

$$k_1 = \frac{\sqrt{1+t^2}}{t^3}, \quad k_2 = \frac{1}{1+t^2}$$

галилеевой кривой $\gamma(t) = (t, x(t), y(t))$. Найдём функции $x(t)$, $y(t)$. Согласно (9)

имеем $m(t) = \int k_2(t) dt = \int \frac{dt}{1+t^2} = \arctg t + c$. Считаем $c = 0$. Вводим функции

$$\ddot{x} = \frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{t^3}} \cos(\arctg t) = \frac{1}{t^3}, \quad \ddot{y} = \frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{t^3}} \sin(\arctg t) = -\frac{1}{t^2}.$$

После двукратного интегрирования получаем семейство кривых

$$\gamma(t) = \left(t, \frac{1}{2t} + C_1 t + C_3, \ln t + C_2 t + C_4 \right).$$

Начальные условия $t = 1, x = \frac{3}{2}, y = 0, \dot{x} = \frac{1}{2}, \dot{y} = 0$ выделяют кривую

$$\gamma(t) = \left(t, \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right), \ln t \right).$$

Это цепная линия. Её кривизны совпадают с заданными. Заменяя параметр $\ln t = u$, приходим к функции $\gamma(u) = \left(e^u, \frac{1}{2}(e^u + e^{-u}), u \right)$.

1.5 Поверхности

В работе [1, с. 70–101] изучаются регулярные поверхности класса C^3 в естественной параметризации

$$\gamma(t, u) = (t, x(t, u), y(t, u)), (t, u) \in \mathbf{D} \subseteq \mathbf{R}^2. \quad (10)$$

Векторы частных производных

$$\gamma_t = (1, x_t(t, u), y_t(t, u)), \gamma_u = (0, x_u(t, u), y_u(t, u))$$

в каждой точке P поверхности (10) неколлинеарны и определяют касательную плоскость $\langle P, \gamma_t, \gamma_u \rangle$ поверхности. Функция (10) получается в результате обращения функции $t = t(v, u)$ по параметру v функции (3). Первая квадратичная форма поверхности есть

$$ds^2 = \begin{cases} dt^2, & \text{если } t \text{ изменяется,} \\ x_u^2 + y_u^2, & \text{если } t \text{ не изменяется.} \end{cases}$$

Вид первой квадратичной формы поверхности такой же, как вид галилеевой нормы (1) вектора из $\mathbf{V}_\Gamma^3$. Коэффициент

$$E = E(t, u) = x_u^2 + y_u^2 \geq 0 \quad (11)$$

первой квадратичной формы называется метрической функцией поверхности (10). Расстояния по поверхности (10) вдоль u -линии вычисляются как $s = \int \sqrt{E(t, u)} du$; вдоль всех остальных линий поверхности (10) расстояние от точки $\gamma(t_0, u_0)$ до точки $\gamma(t_1, u_1)$ равно $s = |t_1 - t_0|$. Единичный вектор нормали поверхности (10) таков:

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{E}}(0, -y_u, x_u). \quad (12)$$

Вторая квадратичная форма поверхности равна

$$\Pi = Adu^2 + 2Bdu dt + Cdt^2, \quad (13)$$

ее коэффициенты вычисляются формулам

$$A = \gamma_{uu} \vec{n} = \frac{-x_{uu}y_u + y_{uu}x_u}{\sqrt{E}}, \quad B = \gamma_{tu} \vec{n} = \frac{-x_{tu}y_u + y_{tu}x_u}{\sqrt{E}},$$

$$C = \gamma_{tt} \vec{n} = \frac{-x_{tt}y_u + y_{tt}x_u}{\sqrt{E}}. \quad (14)$$

Полная кривизна поверхности есть

$$K = AC - B^2.$$

Деривационные формулы поверхности таковы:

$$\gamma_{tt} = C\vec{n}, \quad \gamma_{tu} = \frac{E_t}{2E}\gamma_t + B\vec{n}, \quad \gamma_{uu} = \frac{E_u}{2E}\gamma_u + A\vec{n}, \quad \vec{n}_t = -\frac{B}{E}\gamma_u, \quad \vec{n}_u = -\frac{A}{E}\gamma_u. \quad (15)$$

Имеются аналоги формул Гаусса-Петерсона-Кодацци:

$$K = \frac{E_t^2 - 2E_{tt}E}{4E}, \quad AE_t - 2A_tE = BE_u - 2B_uE, \quad BE_t + 2E(B_t - C_u) = 0. \quad (16)$$

Символы Кристоффеля:

$$\Gamma_{ij}^2 = 0, \quad \Gamma_{11}^1 = 0, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{E_t}{2E}, \quad \Gamma_{22}^1 = \frac{E_u}{2E}. \quad (17)$$

Если все коэффициенты E, A, B, C первой и второй квадратичных форм поверхности являются функциями временного параметра t , то коэффициенты A, B, C второй квадратичной формы поверхности являются функциями метрической функции поверхности:

$$A = p\sqrt{E}, \quad B = \frac{q}{\sqrt{E}}, \quad C = \frac{E_t^2 - 2E_{tt}E + 4qE}{4pE\sqrt{E}}, \quad (18)$$

где p, q постоянные, см. [8]. Поверхность определяется только метрической функцией [5].

Если заданы коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности

$$E = E(t, u) \geq 0, \quad A = A(t, u), \quad B = B(t, u), \quad C = C(t, u), \quad (19)$$

то функции $x = x(t, u)$, $y = y(t, u)$ – компоненты векторной функции $\gamma(t, u)$ (10), описывающей поверхность пространства-времени Галилея Γ^3 , являются решением следующей системы дифференциальных уравнений с частными производными, составленной по формулам (11) и (14):

$$\begin{cases} x_u^2 + y_u^2 = E(t, u), \\ -x_{uu}y_u + y_{uu}x_u = A(t, u)\sqrt{E(t, u)}, \\ -x_{tu}y_u + y_{tu}x_u = B(t, u)\sqrt{E(t, u)}, \\ -x_{tt}y_u + y_{tt}x_u = C(t, u)\sqrt{E(t, u)}. \end{cases} \quad (20)$$

Полученная поверхность имеет квадратичные формы с заданными коэффициентами (19). Единственная поверхность определяется однозначно следующими начальными условиями:

$$\begin{aligned} t = t_0, u = u_0, \quad \gamma(t_0, u_0) = (t_0, x(t_0, u_0), y(t_0, u_0)) = P, \\ \gamma_t(t_0, u_0) = (1, x_t(t_0, u_0), y_t(t_0, u_0)) = (1, a, b), \\ \gamma_u(t_0, u_0) = (0, x_u(t_0, u_0), y_u(t_0, u_0)) = (0, c, d). \end{aligned} \quad (21)$$

Это поверхность, проходящая через точку P и имеющая касательную плоскость с заданными векторами $(1, a, b), (0, c, d)$. Тем самым для поверхностей пространства-времени Галилея Γ^3 устанавливается аналог теоремы Бонне евклидовой геометрии [5]. Аналоги формул Петерсона-Кодацци (16) являются условиями интегрируемости системы дифференциальных уравнений с частными производными (20).

По формуле (11) метрической функции поверхности и деривационным формулам (15) получают две системы дифференциальных уравнений с частными производными:

$$\begin{cases} x_u^2 + y_u^2 = E(t, u), \\ x_{uu} = \frac{E_u(t, u)}{E(t, u)} x_u - A(t, u) y_u, \\ x_{tu} = \frac{E_t(t, u)}{E(t, u)} x_u - B(t, u) y_u, \\ x_{tt} = -C(t, u) y_u; \end{cases} \quad \begin{cases} x_u^2 + y_u^2 = E(t, u), \\ y_{uu} = \frac{E_u(t, u)}{E(t, u)} y_u + A(t, u) x_u, \\ y_{tu} = \frac{E_t(t, u)}{E(t, u)} y_u + B(t, u) x_u, \\ y_{tt} = -C(t, u) x_u, \end{cases} \quad (22)$$

решением каждой из которых являются функции $x = x(t, u)$, $y = y(t, u)$ – те же, что и решения системы (20) – компоненты векторного задания поверхности (10).

Начальные условия (21) определяют единственную поверхность с заданными коэффициентами квадратичных форм (19). В работе [9] приведены примеры получения поверхностей по функциям (19).

Заданные функции (17) – галилеева связность, приводят к системе дифференциальных уравнений с частными производными:

$$\begin{cases} E_t = 2E\Gamma_{12}^1, \\ E_u = 2E\Gamma_{22}^1, \end{cases}$$

решением которой является метрическая функция $E = E(t, u)$ поверхности $\gamma(t, u)$ (10), пространства-времени Галилея Γ^3 . Получаем:

$$L(t, u) = \int_{t_0}^t \Gamma_{12}^1(t, u) dt + \int_{u_0}^u \Gamma_{22}^1(t_0, u) du, \quad E(t, u) = \frac{1}{c} e^{L(t, u)},$$

см. [10]. Если E, A, B, C являются функциями параметра t , то при $A \neq 0$ определяется семейство поверхностей (см. [8]):

$$\gamma(t, u) = \left(t, \frac{\sqrt{E}}{p} \sin w + C_1(t), -\frac{\sqrt{E}}{p} \cos w + C_2(t) \right), \quad w = pu + qt;$$

при $A = 0$ определяется семейство линейчатых поверхностей:

$$\gamma(t, u) = \left(t, u\sqrt{E} \cos qt + C_1(t), u \sin qt + C_2(t) \right).$$

$C_i(t)$ – постоянные интегрирования по параметру u . Это семейства поверхностей по заданной галилеевой связности – множество попарно изометричных поверхностей [10].

Пример 2. Галилеева связность

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{t}{t^2 + u^2}, \quad \Gamma_{22}^1 = \frac{u}{t^2 + u^2}$$

определяет метрическую функцию поверхностей пространства-времени Галилея

$$E = \frac{1}{c} (t^2 + u^2).$$

При $c=1$ и

$$A = \frac{t}{\sqrt{t^2 + u^2}}, \quad B = -\frac{u}{\sqrt{t^2 + u^2}}, \quad C = 0$$

имеем семейство изометричных поверхностей

$$\gamma(t, u) = \left(t, tu + C_1 t + C_3, \frac{u^2}{2} + C_2 t + C_4 \right),$$

здесь C_i – постоянные, определяемые начальными условиями.

Пример 3. Если A и B – указанные в примере 2 функции, но $C = \sqrt{t^2 + u^2}$, то имеем семейство изометричных поверхностей:

$$\gamma(t, u) = \left(t, tu - \frac{t^2 u}{2} + C_1 t + C_3, \frac{u^2}{2} + \frac{t^3}{6} C_2 t + C_4 \right).$$

Все приведенные поверхности попарно изометричны, их метрическая функция $E = t^2 + u^2$. Есть и другие изометричные им поверхности [10]. Получены все эти поверхности в результате решения системы дифференциальных уравнений с частными производными (20). Среди поверхностей с метрической функцией $E = 1 + u^2$ имеются поверхности

$$\gamma(t, u) = \left(t, u, \frac{a}{2} t^2 + \frac{1}{2} u^2 \right), \quad \gamma(t, u) = \left(t, u, \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2} u^2 \right),$$

см. [9], эллиптический и гиперболический параболоиды; они изометричны.

Вместе с тем компоненты $x = x(t, u)$, $y = y(t, u)$ поверхности (10) получаются в результате решения следующих систем дифференциальных уравнений с частными производными в векторной форме

$$\begin{cases} \gamma_{uu} = \frac{E_u}{2E} \gamma_u + A \vec{n}, \\ \gamma_{tu} = -\frac{E_t}{2E} \gamma_u + B \vec{n}, \\ \gamma_{tt} = C \vec{n}, \end{cases}$$

где $\gamma_u = (0, x_u, y_u)$, вектор $\vec{n}$ есть (12).

Схема решения системы дифференциальных уравнений с частными производными (20) согласно [5] такова. По виду первого уравнения имеем

$$x_u = \sqrt{E} \cos w(t, u), \quad y_u = \sqrt{E} \sin w(t, u), \quad (23)$$

функцию $w = w(t, u)$ предстоит найти. Дифференцируем функции (23) по параметру u :

$$x_{uu} = \frac{E_u}{2\sqrt{E}} \cos w - \sqrt{E} w_u \sin w, \quad y_{uu} = \frac{E_u}{2\sqrt{E}} \sin w - \sqrt{E} w_u \cos w.$$

Подставляя значения производных во второе уравнение системы (20), получаем

$$w_u = \frac{A}{\sqrt{E}}.$$

Дифференцируем функции (23) по параметру t и по третьему уравнению системы (20) получаем $w_t = \frac{B}{\sqrt{E}}$. Находим:

$$w_{ut} = \frac{2A_t E - E_t A}{2\sqrt{E^3}}, \quad w_{tu} = \frac{2B_t E - E_t B}{2\sqrt{E^3}}.$$

По аналогу первой формулы Петерсона-Кодацци (16) приходим к выводу, что функция $w = w(t, u)$ является решением уравнения с полным дифференциалом

$$\frac{B}{\sqrt{E}} dt + \frac{A}{\sqrt{E}} du = 0,$$

интегрируя которое, имеем функцию $w = w(t, u)$.

Интегрируем функции (23) по параметру u ; постоянными интегрирования являются функции параметра

$$x = \int \sqrt{E} \cos w du + C_1(t), \quad y = \int \sqrt{E} \sin w du + C_2(t).$$

Дифференцируя дважды эти функции по параметру по четвертому уравнению системы (20) находим функции $C_1(t), C_2(t)$ и функции $x = x(t, u), y = y(t, u)$. Начальные условия (21) определяют единственные функции $x(t, u), y(t, u)$ и единственную поверхность (10). Проверка показывает, что заданные коэффициенты (11) и (14) системы уравнений (20) являются коэффициентами квадратичных форм найденной поверхности.

В примерах 2, 3 получены поверхности по коэффициентам квадратичных форм.

2 Решения систем дифференциальных уравнений

2.1 Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

В исследованиях геометрических свойств пространства-времени Галилея приходится решать дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений. В частности, по натуральным уравнениям кривых получается векторное задание кривой в естественной параметризации. Задача эта разрешена и в евклидовой, и в галилеевой геометрии. Для евклидовой кривой в естественной параметризации $\vec{r}(s) = (x(s), y(s), z(s))$ вычислительные формулы кривизны и кручения таковы:

$$k_1(s) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \quad k_2(s) = \frac{1}{k_1^2} ((\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})\ddot{z} - (\dot{x}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{x})\ddot{y} + (\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y})\ddot{x}).$$

Заданные функции кривизны и кручения

$$k_1 = k_1(s) \geq 0, \quad k_2 = k_2(s) \quad (24)$$

однозначно, с точностью до положения в евклидовом пространстве, определяют кривую $\vec{r}(s)$, имеющую кривизны (24). Здесь по двум функциям $k_1(s)$ и $k_2(s)$ однозначно отыскиваются три функции $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$ – компоненты векторного задания пространственной кривой $\vec{r}(s)$. В связи с чем (24) называются натуральными уравнениями кривой. Система двух дифференциальных уравнений для трех функций, составленная по вычислительным формулам $k_1(s)$ и $k_2(s)$

$$\begin{cases} \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2 = k_1^2, \\ (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})\ddot{z} - (\dot{x}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{x})\ddot{y} + (\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y})\ddot{x} = k_1^2 k_2, \end{cases}$$

не позволяет найти три требуемые функции.

Задача решается другими методами, см. [11, с. 196–205; 12, с. 38–41].

В пространстве-времени Галилея размерности 3 задача решена, см. п. 1.4; по вычислительным формулам кривизны и кручения (6) и (7) составлена система обыкновенных дифференциальных уравнений (8), ее решением являются две функции $x(t)$, $y(t)$ – компоненты векторного задания галилеевой кривой (4) $\gamma(t) = (t, x(t), y(t))$ в естественной параметризации. Схема решения этой системы обыкновенных дифференциальных уравнений приведена в п. 1.4.

В других галилеевых пространствах решены системы обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} (\ddot{x} - \dot{x})^2 + (\ddot{y} - \dot{y})^2 = k_1^2(t), \\ (\ddot{x} - \dot{x})(\ddot{y} - \dot{y}) - (\ddot{y} - \dot{y})(\ddot{x} - \dot{x}) = k_1^2(t)k_2(t); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}^2 + \left(\ddot{y} - \dot{x} + \frac{1}{2}\ddot{x}\right)^2 = k_1^2(t), \\ \ddot{x}(\ddot{y} - \dot{x}) - \ddot{x}(\ddot{y} - \dot{x}) = k_1^2(t)k_2(t); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\ddot{x} - \dot{x} + \frac{1}{e-1}(\ddot{y} - \dot{y})\right)^2 + (\ddot{y} - \dot{y})^2 = k_1^2(t), \\ \left(\ddot{x} - \dot{x} + \frac{1}{e-1}(\ddot{y} - \dot{y})\right)(\ddot{y} - \dot{y}) - (\ddot{y} - \dot{y})\left(\ddot{x} - \dot{x} + \frac{1}{e-1}(\ddot{y} - \dot{y})\right) = k_1^2(t)k_2(t). \end{cases}$$

Случай постоянных коэффициентов рассмотрен в [1], общий случай – в [7].

В 4-мерном пространстве-времени Галилея составлена система трех обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x''^2 + y''^2 + z''^2 = k_1^2, \\ (y''z''' - z''y''')^2 + (x''z''' - z''x''')^2 + (x''y''' - y''x''')^2 = k_1^4 k_2^2, \\ (y''z''' - z''y''')x''' + (x''z''' - z''x''')y''' + (x''y''' - y''x''')z''' = -k_1^3 k_2^3 k_3 \end{cases}$$

с заданными функциями кривизн $k_1 = k_1(t) \geq 0, k_2 = k_2(t), k_3 = k_3(t)$ кривой $\gamma(t) = (t, x(t), y(t), z(t))$.

К настоящему времени указанная система уравнений решена только в случае постоянных кривизн. В работе [13] установлено, что в этом случае $k_3 = 0$, т.е. кривая с постоянными кривизнами уплощается. Тем самым получено некоторое локальное ограничение на размерность пространства-времени Галилея. В малой окрестности всякого события 4-мерного пространства-времени мировая линия события не более чем 3-мерна, она вкладывается в 3-мерное пространство-время. Это согласуется с известным фактом, что наша солнечная система плоская – все планеты движутся в плоскости эклиптики; и наша галактика – Млечный путь, тоже плоская.

2.2 Системы дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка

По заданным векторным полям класса C^1

$$\vec{a}(t, u) = (a^1(t, u), a^2(t, u)) \text{ и } \vec{b}(t, u) = (b^1(t, u), b^2(t, u))$$

на некоторой области D евклидовой плоскости определяется регулярная поверхность класса C^2

$$\omega(t, u) = (t, x(t, u), y(t, u))$$

на той же области в одулярном галилеевом пространстве с точностью до положения в пространстве как решение одной из систем дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка:

$$x_u = a^1(t, u), \quad y_u = a^2(t, u),$$

$$x_t = b^1(t, u), \quad y_t = b^2(t, u);$$

при условиях $a_t^1 = b_u^1, \quad a_t^2 = b_u^2$;

$$x_u = a^1(t, u), \quad y_u = a^2(t, u),$$

$$x_t - x = b^1(t, u), \quad y_t - y = b^2(t, u);$$

при условиях $a_t^1 - a^1 = b_u^1, \quad a_t^2 - a^2 = b_u^2$;

$$x_u = a^1(t, u), \quad y_u = a^2(t, u),$$

$$x_t = b^1(t, u), \quad y_t - \frac{1}{2}x_t + x = b^2(t, u);$$

при условиях $a_t^1 = b_u^1, \quad a_t^2 + \frac{1}{2}a_t^1 - a^1 = b_u^2$;

$$x_u = a^1(t, u), \quad y_u - y = a^2(t, u),$$

$$x_t = b^1(t, u), \quad y_t - x + \frac{1}{e-1}(y_t - ey) = b^2(t, u);$$

при условиях $a_t^1 - a^1 + \frac{1}{e-1}(a_t^2 - ea^2) = b_u^1$, $a_t^2 - a^2 = b_u^2$.

Решения указанных систем дифференциальных уравнений приведены в [14].

2.3 Системы дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка

В евклидовой геометрии доказана теорема Бонне об определяемости поверхности заданными коэффициентам первой и второй квадратичных форм. Заданы шесть функций

$$E(u, v), F(u, v), G(u, v), L(u, v), M(u, v), N(u, v), \quad (25)$$

которые определяют три функции: $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ – компоненты поверхности

$$\vec{r}(t, u) = (t, x(t, u), y(t, u)),$$

имеющей первую и вторую квадратичные формы с коэффициентами (25). Система дифференциальных уравнений с частными производными, написанная по формулам коэффициентов (25), является громоздкой (см., например [15], или в тензорной форме [16], разворачивающуюся в громоздкую систему уравнений). Схемы доказательства теоремы Бонне евклидовой геометрии приведены в [15, с. 455–458; 16, с. 212–214], см. также [12, с. 111–117]. В геометрии пространства-времени Галилея доказательство аналога теоремы Бонне основано на решении систем дифференциальных уравнений (20) и (22) [5]. В некоммутативном пространстве с растром [17] решена система уравнений

$$\begin{cases} x_u^2 + y_u^2 = E(t, u), \\ -x_{uu}y_u + y_{uu}x_u = A(t, u)\sqrt{E(t, u)}, \\ -x_{tu}y_u + y_{tu}x_u = B(t, u)\sqrt{E(t, u)}, \\ -(x_{tt} - x_t)y_u + (y_{tt} - y_t)x_u = C(t, u)\sqrt{E(t, u)}. \end{cases}$$

В других пространствах решены системы уравнений, в которых последнее уравнение заменено одним из следующих уравнений:

$$\begin{aligned} x_u \left(y_{tt} + \frac{1}{2}x_{tt} - x_t \right) - y_u x_{tt} &= C\sqrt{E}; \\ x_u(y_{tt} - y_t) - y_u(x_{tt} - x_t) + \frac{1}{e-1}(y_{tt} - ey_t) &= C\sqrt{E}. \end{aligned}$$

Решение системы уравнений при этом усложняется.

3 Галилеевы методы в евклидовой геометрии

3.1 Галилеевы кривизны евклидовой кривой

Рассматривается регулярная кривая класса C^3 3-мерного евклидова пространства $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I_1 \subseteq \mathbf{R}$, I_1 есть интервал из $\mathbf{R}$. Функ-

ция $x(t)$ обратима, существует обратная функция $t = t(x)$, и кривая $\vec{r}(t)$ задается в параметризации

$$\vec{r}(x) = (x, y(x), z(x)), \quad t \in I \subseteq \mathbf{R}. \quad (26)$$

Такая параметризация кривой называется *выделенной*, функция не менее трех раз дифференцируема. Выделенная параметризация евклидовой кривой напоминает естественную параметризацию галилеевой кривой, см. (4). Только в частном случае $y^2(x) + z^2(x) = a^2$ кривая $\vec{r}(x)$ лежит на круглом цилиндре, в общем случае это произвольная регулярная кривая. Имеем:

$$\vec{r}'(x) = (1, y'(x), z'(x)), \quad \vec{r}''(x) = (0, y''(x), z''(x)).$$

Функция производной второго порядка имеет одну нулевую компоненту.

Определение. Галилеевой кривизной евклидовой кривой (26) в выделенной параметризации называется величина

$$k_1^\Gamma = |\vec{r}''(x)| \sqrt{y''^2(x) + z''^2(x)},$$

галилеевым кручением евклидовой кривой (26) в выделенной параметризации называется величина

$$k_2^\Gamma = \frac{y''z''' - y'''z''}{(k_1^\Gamma)^2}.$$

Согласно п. 1.4 справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Компоненты $y = y(x), z = z(x)$ кривой (26) являются решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} y''^2 + z''^2 = (k_1^\Gamma)^2(x), \\ y''z''' - y'''z'' = (k_1^\Gamma)^2(x)k_2^\Gamma(x), \end{cases} \quad (27)$$

где $k_1^\Gamma(x) \geq 0$, $k_2^\Gamma(x)$ – заданные на интервале I функции класса C^3 галилеевых кривизн. Единственная кривая определяется начальными условиями:

$$x = x_0, \quad (x_0, y(x_0), z(x_0)) = (a, b, c), \quad (1, y'(x_0), z'(x_0)) = (1, d, f).$$

Схема решения системы дифференциальных уравнений приведена в п. 1.4. В результате получается евклидова кривая в выделенной параметризации.

Теорема 1 означает, что выполняется следующее утверждение.

Теорема 2. Функции

$$k_1^\Gamma = k_1^\Gamma(x) \geq 0, \quad k_2^\Gamma = k_2^\Gamma(x)$$

являются галилеевыми натуральными уравнениями евклидовой кривой. #

Пример 4. По галилеевым кривизнам

$$k_1^\Gamma = \frac{\sqrt{2}}{x}, \quad k_2^\Gamma(x) = \frac{1}{x}$$

найдем евклидову кривую $\vec{r}(x) = (x, y(x), z(x))$. Система обыкновенных дифференциальных уравнений (27) принимает вид

$$\begin{cases} y''^2 + z''^2 = \frac{2}{x^2}, \\ y''z''' - y'''z'' = \frac{2}{x^3}. \end{cases}$$

Согласно (9) $m(x) = \int k_2^\Gamma dx = \ln x$ (постоянную интегрирования считаем равной нулю). Полагаем:

$$y'' = -\frac{1}{x}(\cos \ln x - \sin \ln x), \quad z'' = \frac{1}{x}(\sin \ln x - \cos \ln x).$$

Эти функции удовлетворяют рассматриваемой системе дифференциальных уравнений. После двукратного интегрирования находим $y = x \cos \ln x + C_1 x + C_3$, $z = x \sin \ln x + C_2 x + C_4$.

Начальные условия $x_0 = 1, y_0 = 0, z_0 = 0, y'_0 = 1, z'_0 = 1$ выделяют кривую

$$\vec{r}(x) = (x, x \cos \ln x, x \sin \ln x).$$

Ее галилеевы кривизны совпадают с заданными. После замены параметра $x = e^t$ кривая записывается в виде $\vec{r}(x) = (e^t, e^t \cos t, e^t \sin t)$. Это коническая спираль. Заметим, что в п. 1.4 функции y'', z'' подбираются так, чтобы они удовлетворяли первому уравнению системы. Подбор осуществляется неоднозначно.

3.2 Галилеевы квадратичные формы евклидовой поверхности

Пусть задана регулярная поверхность класса C^3 3-мерного евклидова пространства $\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $(u, v) \in \mathbf{D}_1 \subseteq \mathbf{R}^2$, $\mathbf{D}_1$ – область евклидовой плоскости. Ввиду регулярности поверхности, функция $x = x(u, v)$ обратима по каждому параметру, существует обратная функция $v = v(x, u)$, и поверхность $\vec{r}(u, v)$ записывается в параметризации

$$\vec{r}(x, u) = (x, y(x, u), z(x, u)), \quad (x, u) \in \mathbf{D} \subseteq \mathbf{R}^2, \quad (28)$$

$\mathbf{D}$ – область евклидовой плоскости. Параметризация (28) евклидовой поверхности называется *выделенной*, $\vec{r}(x, u)$ является функцией класса C^3 . Имеем:

$$\vec{r}_x = (1, y_x(x, u), z_x(x, u)), \quad \vec{r}_u = (0, y_u(x, u), z_u(x, u));$$

векторы $\vec{r}_x$, $\vec{r}_u$ неколлинеарны, каждая точка поверхности (28) является обыкновенной.

Для поверхности (28) рассматриваем следующие квадратичные формы. *Первой галилеевой квадратичной формой евклидовой поверхности* (28) в выделенной параметризации называется форма

$$I^\Gamma = dx^2 + E(x, u)du^2, \quad (29)$$

ее коэффициент

$$E = E(x, u) = y_u^2 + z_u^2 \geq 0 \quad (30)$$

называется *галилеевой метрической функцией поверхности* (28). Квадрат элемента площади поверхности вычисляется по формуле $ds^2 = E(x, u)dxdu$. Элемент расстояния вдоль линии $\vec{r}(x) = (x, y(x, u(x)), z(x, u(x)))$ на поверхности (28) определяется равенством $dl^2 = (1 + E(x, u(x)))dx^2$. Угол φ между двумя направлениям на поверхности (28) отыскивается из соотношения

$$\cos \varphi = \frac{1 + \sqrt{E(x, u_1(x))E(x, u_2(x))}}{\sqrt{1 + E(x, u_1(x))}\sqrt{1 + E(x, u_2(x))}}.$$

Вектор

$$\vec{n} = \left(0, -\frac{z_u}{\sqrt{E}}, \frac{y_u}{\sqrt{E}} \right) \quad (31)$$

является единичным и перпендикулярен вектору $\vec{r}_u$ – касательному вектору u -линии поверхности. Назовем его *галилеевой нормалью* поверхности (28). Второй *галилеевой квадратичной формой евклидовой поверхности* (28) в выделенной параметризации называется форма

$$\Pi^\Gamma = Adu^2 + 2Bdudx + Cdx^2, \quad (32)$$

где

$$A = \vec{r}_{uu}\vec{n} = \frac{-y_{uu}z_u + z_{uu}y_u}{\sqrt{E}}, \quad B = \vec{r}_{ut}\vec{n} = \frac{-y_{tu}z_u + z_{tu}y_u}{\sqrt{E}},$$

$$C = \vec{r}_{tt}\vec{n} = \frac{-y_{tt}z_u + z_{tt}y_u}{\sqrt{E}}. \quad (33)$$

Галилеевой полной кривизной поверхности (28) в выделенной параметризации называется $K^\Gamma = AC - B^2$. Функции

$$\vec{r}_{tt} = C\vec{n}, \quad \vec{r}_{tu} = \frac{E_t}{2E}\vec{r}_u + B\vec{n}, \quad \vec{r}_{uu} = \frac{E_u}{2E}\vec{r}_u + A\vec{n}, \quad \vec{n}_t = -\frac{B}{E}\vec{r}_u, \quad \vec{n}_u = -\frac{A}{E}\vec{r}_u \quad (34)$$

называются *галилеевыми деривационными формулами* поверхности (28); уравнения

$$K^\Gamma = \frac{E_t^2 - 2E_{tt}E}{4E}, \quad AE_t - 2A_tE = BE_u - 2B_uE, \quad BE_t + 2E(B_t - C_u) = 0 \quad (35)$$

называются *галилеевыми формулами Гаусса-Петерсона-Кодацци евклидовой поверхности* (28); совокупность функций

$$\Gamma_{ij}^2 = 0, \quad \Gamma_{11}^1 = 0, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{E_t}{2E}, \quad \Gamma_{22}^1 = \frac{E_u}{2E} \quad (36)$$

называется *галилеевой связностью евклидовой поверхности* (28). Евклидовы поверхности в выделенной параметризации (28), имеющие одну и ту же галилееву метрическую функцию (30), называются *галилеево изометричными*.

Теорема 3. Пусть на области $\mathbf{D}$ евклидовой плоскости заданы функции класса C^3

$$E = E(t, u) \geq 0, \quad A = A(t, u), \quad B = B(t, u), \quad C = C(t, u). \quad (37)$$

Действительные функции $y = y(t, u), z = z(t, u)$ класса C^3 на области $\mathbf{D}$, являющиеся решением системы дифференциальных уравнений с частными производными вида (20)

$$\begin{cases} y_u^2 + zy_u^2 = E(t, u), \\ -y_{uu}z_u + z_{uu}y_u = A(t, u)\sqrt{E(t, u)}, \\ -y_{tu}z_u + z_{tu}y_u = B(t, u)\sqrt{E(t, u)}, \\ -y_{tt}z_u + z_{tt}y_u = C(t, u)\sqrt{E(t, u)} \end{cases} \quad (38)$$

определяют в евклидовом пространстве регулярную поверхность $\bar{r}(x, u) = (x, y(x, u), z(x, u))$, коэффициенты галилеевых квадратичных форм которой совпадают с заданными функциями (37). Начальные условия вида (22) выделяют единственную поверхность, проходящую через данную точку и имеющую данную касательную плоскость.

Схема решения системы уравнений (38) совпадает со схемой решения системы уравнений (20). Эти системы уравнений различаются только обозначениями неизвестных функций. Уравнения (35) являются условиями интегрируемости системы уравнений (38).

По формулам (33) составляются системы дифференциальных уравнений с частными производными вида (22), их решениями являются те же функции $y = y(t, u), z = z(t, u)$.

Теорема 4. Галилеева связность (36) определяет галилееву метрическую функцию регулярной евклидовой поверхности (28) класса C^3 с точностью до постоянного множителя. При $E = E(t)$ имеем класс галилеево изометрических поверхностей в выделенной параметризации.

Справедливость утверждения основана на аналогии с поверхностями пространства-времени Галилея.

Примеры. В примере 3 п. 1.5 по заданным функциям коэффициентов галилеевых квадратичных форм евклидовой поверхности

$$A = \frac{t}{\sqrt{t^2 + u^2}}, \quad B = -\frac{u}{\sqrt{t^2 + u^2}}, \quad C = \sqrt{t^2 + u^2}$$

найжены евклидовы поверхности в выделенной параметризации [10]. По метрической функции $E = 1 + u^2$ получаются, см. [9], эллиптический и гиперболический параболоиды (п. 1.5) евклидова пространства. В работе [9] приведены и другие примеры получения евклидовых поверхностей по заданным коэффициентам их галилеевых квадратичных форм. В примере 2 получены евклидовы поверхности по их галилеевой связности. Указаны галилеево изометричные поверхности. Согласно примеру 3 галилеево изометричны эллиптический и гиперболический параболоиды.

4 Механические приложения

В механике известна задача И. Ньютона: по заданному полю ускорений движения материальной точки указать уравнения траектории точки [6, с. 11–30]. Функции, описывающие траекторию $\vec{r}(t)$, являются решением уравнения И. Ньютона, которое можно записать в виде

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \vec{F}(t).$$

В аннотации к параграфу 5 [6, с. 26] В. И. Арнольд отмечает: «Анализ общей потенциальной системы с двумя степенями свободы выходит за рамки возможностей современной науки». Методы галилеевой геометрии, развитые после публикации В. И. Арнольда, предоставляют возможность решения задачи И. Ньютона [7, 18].

4.1 Движения с двумя степенями свободы

Материальная точка (x, y) массы 1 движется по плоской траектории $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ во времени t под действием некоторой силы, которая создает поле $\vec{F}$ ускорений движения. В пространстве-времени Галилея рассматривается событие $(t, x(t), y(t))$, мировая линия которого описывается галилеевой векторной функцией

$$\gamma(t) = (t, x(t), y(t)), \quad t \in \mathbf{I} \subseteq \mathbf{R}. \quad (39)$$

Поле ускорений движущейся точки

$$\vec{F}(t) = (f^1(t), f^2(t)) \quad (40)$$

определяет траекторию движения $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ как составляющую мировой линии движения $\gamma(t) = t\vec{e} + \vec{r}(t)$, где $\vec{e}$ – единичный вектор направления времени. Функции $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ являются решением уравнения И. Ньютона

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(t). \quad (41)$$

Геометрия окружающего нас пространства локально является галилеевой, но еще экспериментально не установлен вид этой геометрии. В работе [1] и других работах авторов изучаются различные галилеевы геометрии, методы которых позволяют отыскивать уравнения траектории движения материальных точек в заданном поле ускорения [6, 17].

Поле ускорений (40) согласно уравнению И. Ньютона (41) определяет кривизну k_1 и кручение k_2 мировой линии (39) движения материальной точки в этом поле:

$$k_1 = \sqrt{(f^1(t))^2 + (f^2(t))^2}, \quad k_2 = \frac{f^1(t)\dot{f}^2(t) - \dot{f}^1(t)f^2(t)}{(f^1(t))^2 + (f^2(t))^2}, \quad (42)$$

см. [7]. Согласно п. 1.4 функции кривизны и кручения определяют мировую линию движения с точностью до положения в 3-мерном галилеевом пространстве, а траекторию движения – с точностью до положения на плоскости. Начальные условия, в которых задана точка траектории и касательный вектор

в этой точке, выделяют единственную траекторию точки, движущейся в данном поле ускорений.

Обозначим компоненты скорости движущейся точки: $\vec{v} = (p, q)$.

Теорема 5. *Функции $f^1(t), f^2(t)$ – компоненты поля ускорения движения, определяют компоненты $p(t), q(t)$ скорости движения как решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} \dot{p}^2 + \dot{q}^2 = k_1^2(t), \\ \dot{p}\ddot{q} - \ddot{p}q = k_1^2(t)k_2(t), \end{cases} \quad (43)$$

где $k_1(t)$ и $k_2(t)$ есть (42).

Указанная система обыкновенных дифференциальных уравнений есть система вида (8), схема решения которой приведена в п. 1.4, см. теорему 3 в [7].

Теорема 6. *Параметрические уравнения $x = x(t), y = y(t)$ траектории движения материальной точки в различных галилеевых геометриях являются решением одной из следующих систем обыкновенных дифференциальных уравнений:*

$$\begin{cases} \dot{x} = p, \\ \dot{y} = q; \end{cases} \begin{cases} \dot{x} - x = p, \\ \dot{y} - y = q; \end{cases} \begin{cases} \dot{x} = p, \\ \dot{y} = q - \frac{1}{2}p + x; \end{cases} \begin{cases} \dot{x} - x = p - \frac{1}{e-1}(\dot{y} - ey), \\ \dot{y} - y = q; \end{cases} \begin{cases} \dot{x} = p + 1, \\ \dot{y} = q + 1; \end{cases}$$

компоненты p, q вектора скорости движения по заданному полю ускорения движения являются решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений (43).

Решения всех указанных систем обыкновенных дифференциальных уравнений существуют. Для третьей системы уравнений сначала отыскивается функция $x(t)$, затем функция $y(t)$. Для четвертой системы уравнений сначала решается второе уравнение, потом первое. # Это содержание теоремы 4 в [7], см. также [19].

4.2 Движение с тремя степенями свободы

Траектория движения материальной точки с тремя степенями свободы описывается евклидовой векторной функцией $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, ее можно описать и функцией в выделенной параметризации $\vec{r}(x) = (x, y(x), z(x))$. Согласно п. 3.1 выполняется следующее утверждение.

Теорема 7. *Двумерное поле ускорений $\vec{F}(t) = (f^1(t), f^2(t))$ материальной точки в движении с тремя степенями свободы определяется галилеевыми кривизнами (п. 3.1) $k_1(t)$ и $k_2(t)$ (42) как решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида (43) и систем уравнений теоремы 6. #*

Как известно, вектор ускорения $\vec{a}$ движущейся точки имеет две составляющие – тангенциальную и нормальную:

$$\vec{a} = a_t \vec{t} + a_n \vec{n},$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор касательной к траектории; $\vec{n}$ – единичный вектор нормали траектории. Поэтому теорема 7 решает задачу И. Ньютона для дви-

жения с тремя степенями свободы локально. Если заданы функции тангенциального $a_t(x)$ и нормального $a_n(x)$ ускорений движущейся точки, то функции $y(x), z(x)$ отыскиваются следующим образом. Галилеева кривизна мировой линии движения есть $k_1^\Gamma = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$, кручение равно

$$k_2^\Gamma = \sqrt{\frac{|a_n(x)|}{v^2(x)}} k_1^\Gamma, \text{ где } v(x) = \int a_t(x) dx.$$

Теперь траектория движения в выделенной параметризации находится по галилеевым кривизне и кручению.

Список литературы

1. Долгарев, А. И. Классические методы в дифференциальной геометрии одулярных пространств / А. И. Долгарев. – Пенза : Информационно-издательский центр ПензГУ, 2005. – 306 с.
2. Долгарев, И. А. Альтернативное 2-мерное действительное линейное пространство. Группа Ли базисов пространства / И. А. Долгарев, А. И. Долгарев // Владикавказский математический журнал. – 2007. – Т. 9. – Вып. 4. – С. 4–14.
3. Долгарев, И. А. Альтернативная аффинная плоскость / И. А. Долгарев, А. И. Долгарев // Владикавказский математический журнал. – 2008. – Т. 10. – Вып. 2. – С. 9–20.
4. Хубежты, И. А. Теория плоскостей / И. А. Хубежты. – Владикавказ (Дзауджикау) : ГОУ ВПО СОГУ, 2009. – 476 с.
5. Долгарев, И. А. Системы дифференциальных уравнений в частных производных для поверхностей пространства Галилея : дис. ... канд. физ.-мат. наук / И. А. Долгарев. – Пенза : Изд-во ПензГУ, 2007. – 120 с.
6. Арнольд, В. И. Математические методы классической механики / В. И. Арнольд. – М. : Наука, 1989. – 472 с.
7. Долгарев, А. И. Методы одулярной галилеевой геометрии в описании механических движений / А. И. Долгарев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2007. – № 3. – С. 12–24.
8. Долгарев, И. А. Поверхности 3-мерного пространства Галилея, коэффициенты квадратичных форм которых являются функциями только времениподобного параметра или только пространственноподобного параметра / И. А. Долгарев // Дифференцируемые многообразия фигур : межвуз. тематич. сборник научных трудов. – Вып. 38. – Калининград : Изд-во КГУ, 2007. – С. 44–50.
9. Долгарев, И. А. Поверхности 3-мерного пространства-времени Галилея как решения систем дифференциальных уравнений с частными производными / И. А. Долгарев // Актуальные проблемы математики и методики преподавания математики : межвуз. сборник научных работ. – Пенза : Изд-во ПГТА, 2007. – С. 7–10.
10. Долгарев, И. А. Поверхности пространства-времени Галилея по символам Кристоффеля / И. А. Долгарев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2008. – № 2 (6). – С. 39–51.
11. Рашевский, П. К. Курс дифференциальной геометрии / П. К. Рашевский. – М. : Гостехиздат, 1956. – 420 с.
12. Позняк, Э. Г. Дифференциальная геометрия / Э. Г. Позняк, Е. В. Шикин. – М. : Изд-во МГУ, 1990. – 384 с.
13. Долгарев, А. И. Специальные вопросы теории кривых 4-мерного пространства-времени Галилея / А. И. Долгарев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2007. – № 1 (5). – С. 41–54.

14. **Долгарев, А. И.** Дифференциальные уравнения поверхностей одулярных пространств. Нормальная кривизна поверхности / А. И. Долгарев // Труды СВМО. – Саранск, 2004. – Т. 6. – № 1. – С. 132–144.
15. **Выгодский, М. Я.** Дифференциальная геометрия / М. Я. Выгодский. – М. ; Л. : Гостехиздат, 1949. – 512 с.
16. **Норден, А. П.** Теория поверхностей / А. П. Норден. – М. : Гостехиздат, 1956 – 260 с.
17. **Долгарев, И. А.** Получение поверхности 3-мерного галилеева пространства с растром по коэффициентам ее квадратичных форм / И. А. Долгарев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2007. – № 6. – С. 17–31.
18. **Долгарев, А. И.** Решение задачи И. Ньютона методами галилеевой геометрии / А. И. Долгарев // Труды участников Междунар. школы-семинара по геом. и анализу памяти Н. В. Ефимова (9–15 сентября). – Ростов-на-Дону : ЮРУ, 2008. – С. 28–29.
19. **Долгарев, А. И.** Кривые 3-мерных вейлевских одулярных пространств и кривые евклидовой плоскости / А. И. Долгарев // Дифференцируемые многообразия фигур : межвуз. тематич. сборник научных трудов. – Вып. 33. – Калининград : Изд-во КГУ, 2002. – С. 25–28.

Долгарев Артур Иванович

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра математики
и суперкомпьютерного моделирования
Пензенский государственный
университет

Dolgarev Artur Ivanovich

Candidate of physico-mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of mathematics
and supercomputer modeling,
Penza State University

Долгарев Иван Артурович

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра математики
и суперкомпьютерного моделирования
Пензенский государственный
университет

Dolgarev Ivan Arturovich

Candidate of physico-mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of mathematics
and supercomputer modeling,
Penza State University

E-mail: delivar@yandex.ru

УДК 514.126

Долгарев, А. И.

Некоторые приложения галилеевых методов / А. И. Долгарев,
И. А. Долгарев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион.
Физико-математические науки. – 2009. – № 2 (10). – С. 39–59.